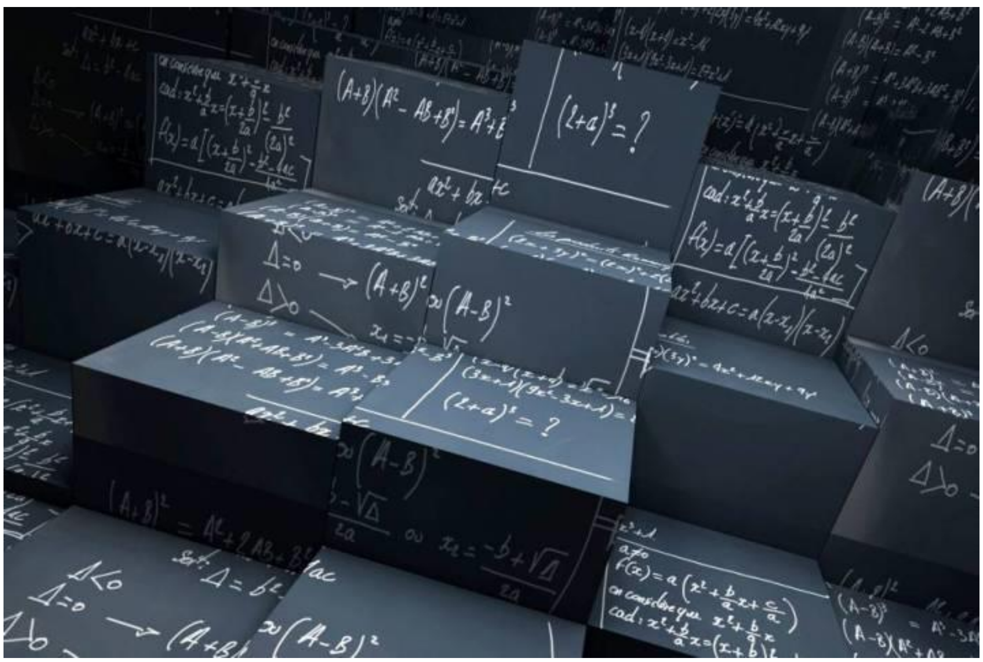
LIMACHE
COLLEGE
FUNDADO 1981

Matemática

Tercero Medio

UNIDAD 1: Necesidad y aplicación de los números complejos

Clase Semana 2: Unidad iamginaria y numero complejo



Jesús Ortega A.

Números complejos

Determina la solución de las siguientes ecuaciones cuadráticas

a) $x^2 - 2x + 2 = 0$
b) $3x^2 + 5x + 3 = 0$
c) $4x^2 - 5x + 2 = 0$
d) $-10x^2 + 6x - 1 = 0$
e) $x^2 + 4 = 0$

- ¿Qué tienen en común las soluciones de todas las ecuaciones propuestas?
- ¿Qué significa tal solución?
- ¿Hay una forma diferente de expresar las soluciones propuestas?

La ecuación $x^2 + 4 = 0$ es de segundo grado del Tipo 2 (Ecuación cuadrática incompleta Pura). Dando las soluciones a esa ecuación obtendremos

$$x^2 + 4 = 0$$
$$x^2 = -4 \qquad \text{/Sacamos la raiz}$$
$$x = \pm\sqrt{-4}$$
$$x = \pm\sqrt{4 \cdot -1}$$
$$x = \pm 2\sqrt{-1}$$

De lo anterior, sabemos que $\sqrt{-1}$ *no tiene solucion en* $\mathbb{R}$
Evidentemente no tiene raíces reales.
En el sistema de los números complejos esta ecuación si tiene solución. Es más cualquier ecuación cuadrática siempre tiene soluciones en los números complejos.

Definición 1: Unidad Imaginaria

Se define unidad imaginaria como una extensión de los números Reales, pues no hay un número real que tenga un cuadrado negativo.
Toda unidad Imaginaria se define matemáticamente como:

$$\boldsymbol{i = \sqrt{-1}}$$

Analógicamente,

$$\boldsymbol{i^2 = -1}$$

Ejemplo: Resolver $x^2 - 2x + 2 = 0$

Paso 1: Aplicamos la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Paso 2: Se aplica la definición de $i = \sqrt{-1}$

Se sustituye $\sqrt{-4}$ por $\sqrt{4}i$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4}i}{2}$$

Paso 3: Se simplifica las expresiones resultantes

Se simplifica $\sqrt{4}$

$$x = \frac{2 \pm 2i}{2}$$

Se saca 2 de factor común

$$x = \frac{2(1 \pm i)}{2}$$

Se cancelan los factores comunes del numerador y del denominador

$$x = 1 \pm i$$

Paso 4: Concluir

La ecuación dada tiene dos raíces

$$x_1 = 1 + i \text{ y } x_2 = 1 - i$$

Definición 2: Potencia Imaginaria

De acuerdo a la definición principal

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$$

Se concluye lo siguiente:

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot -1 = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$

$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = -1$

…

..

Así pues, forman una sucesión periódica, pues los valores de las cuatro primeras potencias que son 1 , i , -1 , $-i$,
Los resultados se repiten de cuatro en cuatro, por eso, para saber cuánto vale una determinada potencia de i, se divide el exponente entre 4, y el resto es el exponente de la potencia equivalente a la dada.
Por lo tanto:

$i^{4k} = 1$ Si el resto es 0
$i^{4k+1} = i$ Si el resto es 1
$i^{4k+2} = -1$ Si el resto es 2
$i^{4k+3} = -i$ Si el resto es 3

Ejemplo 1:

Determinar el resultado de i^{18}

Usando la definición 2, solo tomamos el exponente y la dividimos por 4 (pues cada 4 valores se repite el mismo resultado)

$$18 : 4 = 4$$
$$2$$

Entonces,

$$i^{18} = i^{4 \cdot 4 + 2} = (i^4)^4 \cdot i^2$$
$$= 1^4 \cdot -1$$
$$= -1$$

En resumen, si solo tomamos el resto:

$$como\ el\ resto\ es\ 2, el\ resultado\ será - 1$$

Ejemplo 2:

Determinar el resultado de i^{95}

$$95 : 4 = 23$$
$$3$$

Como el resto es 3,

$$i^{95} = -i$$

Observación

¿Qué pasa en el caso de tener una potencia negativa?

Si queremos calcular i^{-n} solo debemos escribirlo de la siguiente manera

$$i^{-n} = \frac{1}{i^n}.$$

Entonces resolvemos el denominador como se ha explicado para potencias positivas de i y luego se vuelve a escribir en el denominador.

Ejemplo

Determinar el resultado de i^{-89}

Por eso calcularemos primero i^{89}. Mediante el procedimiento anterior, si calculamos la división de 89 entre 4 obtenemos $89 = 4 \cdot 22 + 1$, por lo que el resto es 1. Así tenemos:

$$i^{89} = i^1 = i$$

Una vez tenemos esto, reescribimos lo que estábamos buscando y obtenemos:

$$i^{-89} = \frac{1}{i^{89}} = \frac{1}{i}$$

Definición 3: Número complejo

Se define numero complejo a todo número de la forma

$$z = a + bi \quad con\ a, b \in \mathbb{R}$$

Esta forma de representar al número complejo se le denomina forma binomial o algebraica. Además:

a: se llama parte real del complejo z y se denota como Re(z).
b: se llama parte imaginaria del complejo z y se denota como Im(z).

Ejemplo: En el número complejo $z = 2 + 3i$ se tiene:
$Re(z) = 2\ (parte\ real\ de\ z)$.
$Im(z) = 3\ (parte\ imaginaria\ de\ z)$.

Igualdad de complejos

Dos complejos son iguales cuando son iguales sus partes reales y también sus partes imaginarias, respectivamente.
Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, con $z_1 = z_2$, entonces se cumple que $a = c$ y $b = d$.

$$a + bi = c + di \quad \Longleftrightarrow \quad a = c \quad y \quad b = d$$

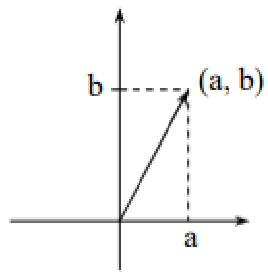
Expresión binomial y cartesiana de un número complejo

Cualquier número complejo $z = a + bi$ también se puede considerar como un par ordenado (a, b) de números reales, donde la segunda componente del par ordenado corresponde al coeficiente de la unidad imaginaria i, entonces:

Expresión cartesiana: (a, b)

Representación de números complejos

El complejo $z = (a, b)$ puede ser representado en un gráfico de Argand, mediante un vector flecha, de origen $O(0,0)$ y punto final P de coordenadas (a, b).



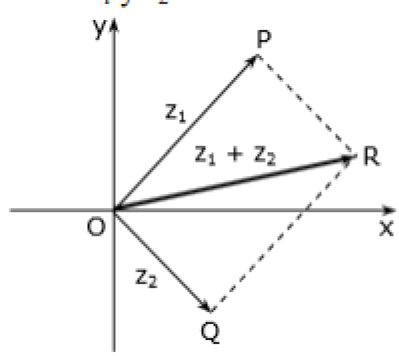
Adición de complejos

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$. Entonces,

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + bi) + (c + di) \\ &= (a + c) + (b + d)i \end{aligned}}$$

La adición $z_1 + z_2$ queda representada en un plano de Argand por la diagonal del paralelogramo cuyos lados son los vectores z_1 y z_2.

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= z_1 \\ \overrightarrow{OQ} &= z_2 \end{aligned}\right\} \ \overrightarrow{OR} = z_1 + z_2$$



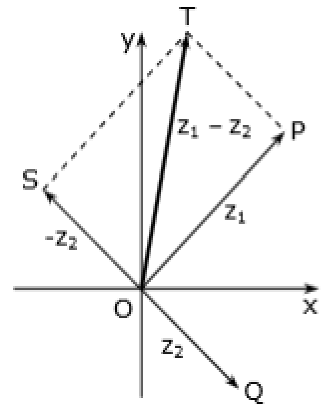
Sustracción de complejos

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$.Entonces,

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (a + bi) - (c + di) \\ &= (a - c) + (b - d)i \end{aligned}}$$

La sustracción (resta) $z_1 - z_2$, queda representada por la suma de z_1 con el opuesto del vector z_2, $z_1 + (-z_2)$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OP} = z_1 \\ \overrightarrow{OS} = -z_2\end{array}\right\} \overrightarrow{OT} = z_1 - z_2$$



Guía Complementaria

Completar (obsérvese el primer ejemplo):

COMPLEJO z	PARTE REAL Re(z)	PARTE IMAGINARIA Im(z)
z=2+3i	Re(z)=2	Im(z)=3
z=3-i		
z=1+i		
$z=3-3\sqrt{3}\,i$		
z=3		
z=-2i		
z=i		

Dados los complejos $z_1=2+3i$, $z_2=-1+4i$ y $z_3=2-5i$, hallar:

a) $z_1+z_2=$

b) $z_1+z_3=$

c) $z_1-z_2=$

d) $z_3-z_2=$

e) $3z_2+2z_3=$

f) $2z_1-3z_2=$

g) $z_3-3z_1+4z_2=$

h) $z_1 -3z_3 =$

Calcular las siguientes **potencias sucesivas de i**:

a) $i^{12}=$ *(Soluc: 1)*

b) $i^{77}=$ *(Soluc: i)*

c) $i^{125}=$ *(Soluc: i)*

d) $i^{723}=$ *(Soluc: –i)*

e) $i^{2344}=$ *(Soluc: 1)*

f) $\frac{1}{i}=$ *(Soluc: –i)*

g) $\frac{1}{i^2}=$ *(Soluc: –1)*

h) $\frac{1}{i^3}=$ *(Soluc: i)*

i) $i^{-4}=$ *(Soluc: 1)*

j) $\frac{1}{i^5}=$ *(Soluc: –i)*

k) $i^{-6}=$ *(Soluc: –1)*

l) $i^{544}=$ *(Soluc: 1)*

m) $i^{6254}=$ *(Soluc: –1)*

n) $i^{-1}=$ *(Soluc: –i)*

o) $i^{-527}=$ *(Soluc: i)*

Marca la alternativa correcta

1. El **valor** de $\sqrt{-25}+2\sqrt{-4}-\sqrt{-36}$

   a) $3i$
   b) $4i$
   c) $5i$
   d) $6i$
   e) $-6i$

2. El **valor** de i^{116} es

   a) 0
   b) 1
   c) -1
   d) i
   e) $-i$

3. El valor de $(-i^{-17}+i^{125})^2$

   a) 0
   b) 4
   c) -4
   d) $4i$
   e) $-4i$

4. El **valor** de $((i^{-3})^2)^5)$ es:

   a) 0
   b) 1
   c) -1
   d) i
   e) $-i$

5. El **resultado** del **producto** entre $\sqrt{-64}$ y $\sqrt{-4}$ es:

   a) 16
   b) -16
   c) $16i$
   d) $-16i$
   e) $12i$

6. El **valor** de $\sqrt{-64\cdot-4}$ es:

   a) 16
   b) -16
   c) $16i$
   d) $-16i$
   e) $12i$

7. El **resultado** de $i^0 + i^1 + i^2 + i^3$ es:

   a) 0
   b) 1
   c) -1
   d) i
   e) $-i$

8. ¿Cual de las siguientes potencias de i sumadas con i^3 resulta el **neutro aditivo** (cero)?

   a) i^0
   b) i^1
   c) i^2
   d) i^3
   e) 0

9. El resultado de $\boldsymbol{3i - 4i^2 - 14i^{40} + 30i^{21}}$ es:

   a) 15
   b) $-15i$
   c) $-18 + 33i$
   d) $15i$
   e) $-10 + 33i$

10. El **resultado** de $\sqrt{-16} - \sqrt{100} + i^5 - 10i^2$

   a) $-5i$
   b) 5
   c) $10 + 15i$
   d) $20 + 15i$
   e) $5i$

11. Si a, b $\in R$ y $a+3i = 2 - bi$, entonces a y b son respectivamente:

A) 3 y 2
B) 2 y 3
C) -2 y 3
D) -2 y -3
E) 2 y -3

12. ¿Cuál es el resultado de i^{1232}?

A) 1
B) -1
C) –i
D) i
E) 2

13. Si $a=-\sqrt{3}\,i$ y $b=3\sqrt{3}\,i$, entonces el valor de a · b es igual a:

A) -9i
B) 9i
C) -9
D) 9
E) 27

15. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones no tiene solución en los números reales?

A) $x^2 - 9 = 0$
B) $-8 + x^2 = 0$
C) $x^2 + 5 = 0$
D) $x^2 - \sqrt{3} = 0$
E) $-\frac{1}{2} + x^2 = 0$

16. ¿Qué proposición(es) es(son) verdadera(s) acerca de los números imaginarios?

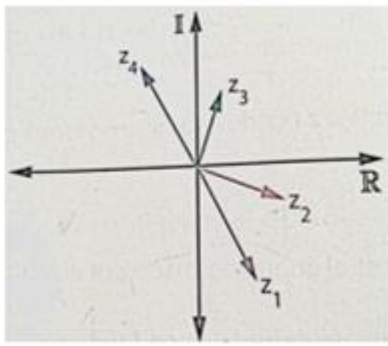
I. Permite extraer raíces cuadradas a números negativos.
II. Incluyen al cero.
III. Permiten ordenar el conjunto de los números complejos.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) I y II
E) I y III

17. $\sqrt{-12}$ se puede representar como:

A) $6i$
B) $2\sqrt{3}i$
C) $12i$
D) $3\sqrt{2}i$
E) $4 + 3i$

18. Dados los complejos z_1, z_2, z_3 y z_4 en el plano, ¿Cuál(es) de las siguientes relaciones es(son) verdadera(s)?



I.- $z_3 = z_2 + z_4$
II.- $z_1 - z_2 = z_3$
III.- $z_2 - z_3 = z_1$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) I y II
E) I y III