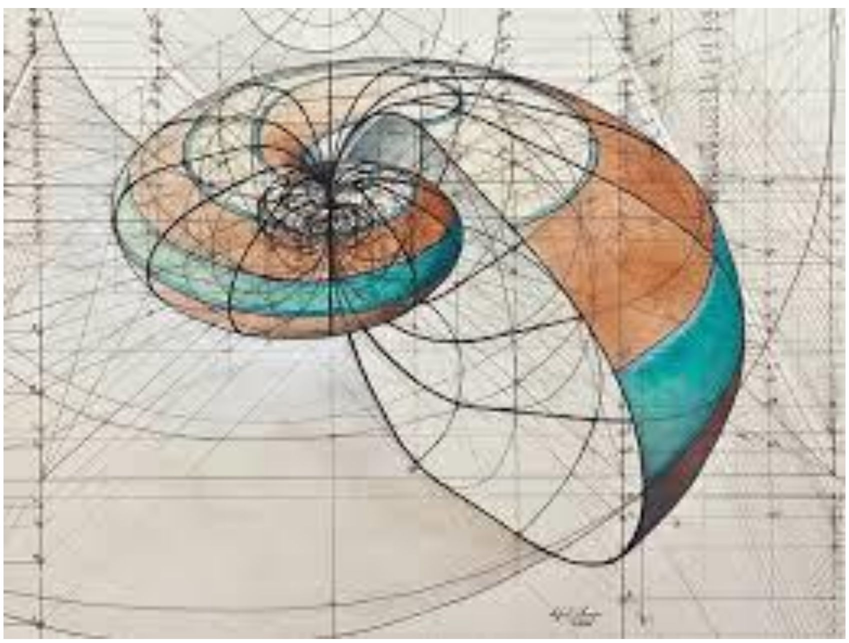
Matemática tercero medio

UNIDAD 0: REAPRENDIZAJE

CLASE 1: ECUACIÓN CUADRÁTICA



Profesor: Jesús Ortega Altamirano

Definición 1:

Una ecuación cuadrática o de segundo grado es aquello en la cual la incógnita aparece con un exponente dos, como máxima potencia. En su forma más simple se representa como:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad donde\ a, b, c \in \mathbb{R}$$
$$Además,\ a \neq 0$$

Generalmente una ecuación de segundo grado posee dos soluciones. Por tanto, al resolver éste tipo de ecuaciones intentamos encontrar los valores (las dos soluciones) que puede tomar la incógnita para que la igualdad planteada se cumpla. Al resolver una ecuación nos podemos encontrar con tres casos, los que se pueden resolver de distintas maneras, para facilitar el trabajo.

OBSERVACIONES

1. El siguiente ejemplo puede no parecer una ecuación cuadrática o tal vez si, pero se debe analizar la situación antes de resolver:

   Si $\boldsymbol{a^2 + b^2 = 52}$ y $\boldsymbol{ab = 4}$, ¿cuál es el valor de $\boldsymbol{(a+b)^2}$?

   SOLUCIÓN:

   De última parte tenemos $(a+b)^2$, que resolviéndolo tenemos

   $$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

   Reemplazamos lo entregado en el enunciado

   $$a^2 + 2ab + b^2$$
   $$a^2 + b^2 + 2ab$$
   $$52 \quad + \quad 2(4)$$
   $$52 + 8$$
   $$60$$

   Aunque la ecuación "suene" a cuadrática, lo primero que se debería hacer es analizar lo entregado

2. El siguiente ejemplo es una ecuación cuadrática fraccionaria

¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $\left(\frac{2x}{3}\right)^2 + \frac{3x}{5} = 2$?

Antes de resolver, deben tener en cuenta algunas propiedades de potencias y fracciones

$$\left(\frac{2x}{3}\right)^2 + \frac{3x}{4} = 2$$

$$\frac{4x^2}{9} + \frac{3x}{4} = 2 \qquad \text{(MCM 9,4=36)}$$

$$36 \cdot \frac{4x^2}{9} + 36 \cdot \frac{3x}{4} = 36 \cdot 2$$

$$4 \cdot 4x^2 + 9 \cdot 3x = 72$$

$$16x^2 + 27x - 72 = 0$$

Desde este punto, recién se puede resolver la ecuación cuadrática por el método que más convenga:

Fórmula general de factorización: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Entonces, sus coeficientes son $a = 16,\ b = 27,\ c = -72$

$$x = \frac{-27 \pm \sqrt{27^2 - 4 \cdot 16 \cdot -72}}{2 \cdot 16}$$

$$x = \frac{-27 \pm \sqrt{729 + 4608}}{32}$$

$$x = \frac{-27 \pm \sqrt{5337}}{32}$$

$$x = \frac{-27 \pm \sqrt{9 \cdot 593}}{32}$$

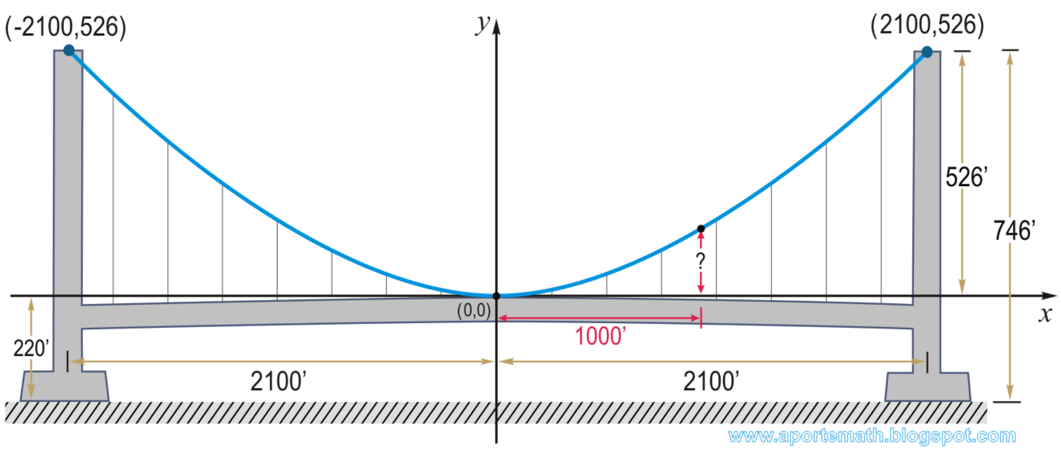
$$x = \frac{-27 \pm 3\sqrt{593}}{32}$$

$$x_1 = \frac{-27+3\sqrt{593}}{32} \qquad x_2 = \frac{-27-3\sqrt{593}}{32}$$

3. El puente Golden Gate enmarca la entrada a la bahía de San Francisco. Sus torres de 746 pies de altura están separadas por una distancia de 4200 pies. El puente está suspendido de dos enormes cables que miden 3 pies de diámetro: el ancho de la calzada es de 90 pies y ésta se encuentra aproximadamente a 220 pies del nivel del agua. Los cables forman una parábola y tocan la calzada en el centro del puente. Determinar la altura de los cables a una distancia de 1000 pies del centro del puente.

Solución:

Empezarnos seleccionando la ubicación de los ejes de coordenadas de modo que el eje x coincida en la calzada y el origen coincida en el centro del puente.



Como resultado de esto, las torres gemelas quedarán a 746-220=526 pies arriba de la calzada y ubicadas a 42002=2100 pies del centro.
Los cables de forma parabólica se extenderán desde las torres, abriendo hacia arriba, y tendrán su vértice en (0,0) como se ilustra en la figura de abajo.
La manera en que seleccionamos la colocación de los ejes nos permite identificar la ecuación de una parábola como:

$$y = ax^2, a > 0.$$

Observe que los puntos $(-2100,526)$ y $(2100,526)$ están en la gráfica parabólica.
Con base en estos datos podemos encontrar el valor de a en

$$y = ax^2$$
$$526 = a(2100)^2$$
$$a = 526(2100)^2$$

Así, la ecuación de la parábola es: $y = 526(2100)^2 \cdot x^2$

La altura del cable cuando x=1000 es: $y = 526(2100)^2(1000)^2 \approx 119.3 pies$

Por tanto, el cable mide 119.3 pies de altura cuando se está a una distancia de 1000 pies del centro del puente.

Guía complementaria

i. Usando la fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, resolver las siguientes ecuaciones:

1) $6x^2 + 7x - 3 = 0$
2) $39x^2 - 83x = 56$
3) $7x^2 - 13x - 1 = 0$
4) $(x+7)(x+3) = 21$
5) $(5x-3)(2x+1) = 46 - x$
6) $5x(x-6) = x - 30$
7) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{7}{6x}$
8) $\dfrac{2x-3}{x+1} + \dfrac{x-5}{x-1} = 2$
9) $\dfrac{7}{x-3} - \dfrac{10}{x-2} - \dfrac{6}{x-1} = 0$
10) $ax^2 + bx - c = 0$
11) $6m^2 + bmx = 2b^2x^2$
12) $(2x+c)^2 = 2x - c$

ii. Resuelve los siguientes problkemas

1) Encontrar dos números su suma sea 30 y su producto 221.

2) Encontrar un número tal que dos veces su cuadrado exceda al propio número en 45.
3) Separar 500 en dos números tales que la suma de sus recíprocos sea igual al recíproco de 120.

4) El perímetro de un rectángulo es 320 cm. Calcular su área si su largo es el triple de su ancho.

5) La diferencia entre los lados de un rectángulo es 70 cm. Calcular esos lados sabiendo que su diagonal mide 130 cm. Liceo Marta Donoso Espejo

6) Un jardín rectangular de 6m por 4m es rodeado por una franja de cemento de un ancho fijo y de modo que su área sea igual al área del jardín. Encontrar el ancho de la franja pavimentada.

7) Dos motoristas distanciados por 130 km., parten para encontrarse. Si la velocidad de uno es de 30 km/h y la velocidad del otro es 33 más que el número de horas que pasan antes del encuentro. Determinar la distancia recorrida por ambos antes de encontrarse y el tiempo transcurrido desde que partieron.

8) Dos hombres pueden terminar un trabajo en 12 días, trabajando juntos. Si el trabajador B tarda 10 días más que el trabajador A en hacer el trabajo solo. Encontrar cuánto tarda A en hacer solo el trabajo.

9) La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 9. Si se multiplica este número por otro cuyos dígitos están invertidos, el producto es 2430. Encontrar el número.

10) Dos objetos se deslizan sobre los lados de un ángulo recto. Si uno está a100 cm del vértice y se aproxima a él a 10cm/seg , y el otro objeto está a 50 cm. del vértice y se aproxima a él a 15 cm/seg, encontrar cuándo los dos objetos estarán separados por 150 cm.

iii. Determina las raíces solución de las siguientes ecuaciones

1) $25x^2 - 40x + 16 = 0$

2) $5x^2 - 3x + 2 = 0$

3) $2x^2 + 7x + 6 = 0$

4) $3x^2 - 8x + 4 = 0$