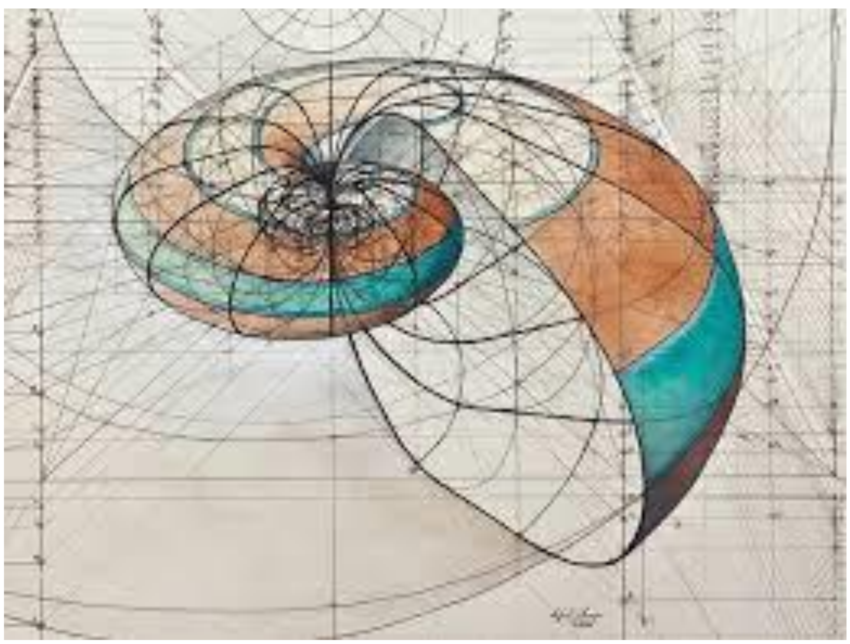
Funciones y procesos infinitos

Cuarto medio electivo

UNIDAD 1: PROGRESIONES INFINITAS

Clase 1: Sucesión y Sumatorias



Profesor: Jesus Ortega A

1. Sucesiones

Definición 1

Una sucesión es una función definida de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que se acostumbra a denotar por a_n en lugar de $f(n)$, así:

$$a_n \in \mathbb{R}, \forall \ n \in \mathbb{N}$$

a_n: Se llama término n–ésimo o término de lugar n.

a_1: Es el primer término de la sucesión.

a_k: Es el k–ésimo término de la sucesión.

Las sucesiones se encuentran presentes en casi todos los tópicos de las matemáticas, de ahí su importancia. Eventualmente, $n \in \mathbb{N}_0$, $N_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ejemplo 1

Vamos a dar algunas sucesiones definidas por su término n–ésimo, o bien, en forma recursiva.

1. $a_n = \frac{2n-1}{n^2+1}$
2. $a_n = 2n - 1$
3. $a_n = (-1)^n$
4. $a_n = \cos(n\pi)$
5. $a_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$
6. $a_n = \frac{1}{n}$
7. $a_1 = 1, a_2 = 2, \ldots, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$
8. $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \ldots, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

Dada la sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n$, su k–ésimo término es a_k, el siguiente término es a_{k+1} también llamado sucesor, el anterior al k–ésimo término es a_{k-1} también llamado antecesor.

Profesor: Jesus Ortega A

1.1 Ejercicios resueltos

1. Dada la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

   a) Determine su término enésimo

   b) Pruebe que $a_k - a_{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$

   c) Calcule $a_1 - a_{n+1}$

Solución:

a) De inmediato $a_n = \frac{1}{n}$

b) $a_k - a_{k+1} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$

c) $a_1 - a_{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$

2. Dada la sucesión $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$

   a) Determine su término n-ésimo

   b) Determine el anterior y siguiente término n-ésimo

   c) Calcule $a_{2k} - a_{2k+1}$

Solución:

a) $a_n = \frac{1}{2n-1}$

b) Término anterior se determina reemplazando “n-1” en la expresión de a)

$$a_{n-1} = \frac{1}{2(n-1)-1} = \frac{1}{2n-2-1} = \frac{1}{2n-3}$$

De forma análoga, el término siguiente se determina reemplazando “n+1” en la expresión de a)

$$a_{n-1} = \frac{1}{2(n+1)-1} = \frac{1}{2n+2-1} = \frac{1}{2n+1}$$

c) $a_{2k} - a_{2k+1} = \frac{1}{2(2k)-1} - \frac{1}{2(2k+1)-1} = \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k+1} = \frac{4k+1-(4k-1)}{(4k-1)(4k+1)} = \frac{2}{16k^2-1}$

1.2 Ejercicios Propuestos

1. Escriba los cuatro primeros términos, el término k–ésimo, el término anterior y siguiente del término k–ésimo de las siguientes sucesiones cuyo término n–ésimo es:

   a) n^2

   b) $2^n - n$

   c) $\dfrac{3n-5}{n+2}$

   d) $(-1)^n n$

   e) $(-1)^{n+1}3^{2n}$

   f) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

2. Escriba el enésimo término de las siguientes sucesiones

   a) $1, 3, 5, 7, \ldots$

   b) $3, -9, 27, -81, \ldots$

   c) $\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots$

   d) $5\cdot 1, 11\cdot 3, 17\cdot 5, 23\cdot 7, \ldots$

   e) $\frac{3}{1\cdot 2}, \frac{-7}{3\cdot 3}, \frac{11}{5\cdot 4}, \frac{-15}{7\cdot 5}, \ldots$

   f) $1-x^2, 5+x^3, 9-x^4, 13+x^5, \ldots$

   g) $1\cdot(p-1), 3\cdot(p-2), 5\cdot(p-3), \ldots,$ p constante.

Soluciones:

1.

a) $1^2, 2^2, 3^2$ y 4^2; $k^2, (k-1)^2$ y $(k+1)^2$

b) $1, 2, 5, 12$; $2^k - k$, $2^{k-1} - (k-1)$ y $2^{k+1} - (k+1)$

c) $-\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}$; $\frac{3k-5}{k+2}, \frac{3k-8}{k+1}, \frac{3k-2}{k+3}$

d) $-1, 2, -3, 4$; $(-1)^k k$, $(-1)^{k-1}(k-1)$, $(-1)^{k+1}(k+1)$

e) $3^2, -3^4, 3^6, -3^8$; $(-1)^{k+1}3^{2k}$, $(-1)^k 3^{2k-2}$, $(-1)^k 3^{2k+2}$

f) 2, $\left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{4}{3}\right)^3, \left(\frac{5}{4}\right)^4$; $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k, \left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}, \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}$.

2. a) $a_n = 2n - 1$

b) $a_n = (-1)^{n-1}3^n$

c) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

d) $a_n = (6n-1)(2n-1)$

e) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}(4n-1)}{(2n-1)(n+1)}$

f) $a_n = 4n - 3 + (-1)^n x^{n+1}$

g) $a_n = (2n-1)(p-n);$

$1 \leq p \leq n$

2. Sumatorias

Una sumatoria es un símbolo que se ocupa para denotar en forma comprimida la suma sucesiva de los términos de una sucesión.

Definición 2:

Se define el símbolo ∑ (Sigma, que se lee como sumatoria) inductivamente, por

1. $\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1$

2. $\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}$, donde a_n es una sucesión cualquiera.

De esta definición se desprende fácilmente que,

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{1} a_i + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n+1}$$

Nótese que $\sum_{i=1}^{n+1} a_i$ representa a una suma desde el primer término de la sucesión

a_1 Para $i = 1$ hasta el último término que en este caso es a_n para i = n.
Es decir, en i = 1 se inicia la suma de los sucesivos términos de a_i e i = n indica donde se finaliza la suma.

2.1 Propiedades de sumatoria

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Profes

3. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$

4. $$\sum_{k=p}^{n} r^{k-1} = r^{p-1}\frac{r^{n-p+1}-1}{r-1},\ r \neq 1,\ 0 \leq p \leq n$$

5. Sumatoria de un valor constante

$$\sum_{i=p}^{n} c = c(n-p+1),\ 0 \leq p \leq n$$

6. Sumatoria de un valor constante por una variable

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i;$$

7. Sumatoria de una Suma (También conocida como distributiva)

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

8. Propiedad telescópica

Si $\{a_n\}_n$ es una sucesión, la suma de las diferencias de sus términos consecutivos está dada por:

$$\sum_{k=M}^{N}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_M$$

(Propiedad que se conoce como propiedad telescópica)

Nota:

La propiedad telescópica se aplica sobre la diferencia de dos términos consecutivos de una sucesión, independiente del orden en que estos se restan.

Ejemplo

1. $$\sum_{k=M}^{N}(a_k - a_{k+1}) = a_M - a_{n+1}$$

2. $\sum_{i=p+2}^{N}(a_{i+3}-a_{i+2})=a_{N+3}-a_{p+4}$

Observación: La fórmula varía según el término inicial de la sumatoria. En estos casos se verán a partir del $n=1$ o $n=0$

2.2 Ejercicios resueltos

1. Desarrollar las siguientes sumatorias

a) $\sum_{k=4}^{8} k(2k-1)$ b) $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{2^k+1}{k+2}$

Solución:

De la definición se tiene:

a) $\sum_{k=4}^{8} k(2k-1) = 4\cdot 7+5\cdot 9+6\cdot 11+7\cdot 13+8\cdot 15,$

note que son $5=8-4+1$ términos como debería ser.

b) $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{2^k+1}{k+2} = -\frac{2^0+1}{2}+\frac{2^1+1}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{2^{n-1}+1}{n+1}.$

Note que en este caso se tiene $n-1-0+1=n$ términos.

2. Escribir usando $\sum$, las siguientes sumas:

1. $1^2+3^2+5^2+\ldots$ (hasta $n+1$ términos)
2. $2\cdot 7+5\cdot 9+8\cdot 11+\ldots+422\cdot 287$
3. $\frac{8}{3\cdot 5}-\frac{12}{5\cdot 7}+\frac{16}{7\cdot 9}-\ldots$ (hasta p términos).

Solución:

De inmediato se tiene:

1. $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2$, note que $n-0+1=n+1$ términos.

2. Notemos que $a_k = (3k-1)(2k+5)$, $k = 1, 2, \dots$ la sumatoria debe terminar en $3k-1 = 422 \wedge 2k+5 = 287$ de donde en ambos casos $k = 141$, por tanto $\sum_{k=1}^{141}(3k-1)(2k+5)$.

3. De inmediato se tiene $\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\frac{4(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$.

3. Calcule el valor de las siguientes sumatorias

$$\text{a)} \sum_{k=1}^{2n} k \qquad \text{b)} \sum_{k=3}^{n} k \qquad \text{c)} \sum_{k=n+1}^{2n-1} k$$

Solución

$$\text{a)} \sum_{k=1}^{2n} k = \frac{1}{2}2n(2n+1) = n(2n+1)$$

$$\text{b)} \sum_{k=3}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k - (1+2) = \frac{1}{2}n(n+1) - 3$$

$$\text{c)} \sum_{k=n+1}^{2n-1} k = \sum_{k=1}^{2n-1} k - \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}(2n-1)(2n-1+1) - \frac{1}{2}n(n+1)$$

4. Calcula usando propiedad telescópica

$$\sum_{k=1}^{48}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = \sqrt{48+1}-\sqrt{1} = \sqrt{49}-\sqrt{1} = 7-1 = 6$$

5. ¿Se puede aplicar la propiedad telescópica? Entrega la solución

$$\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right) =$$

SI porque la sumatoria dada es sobre la diferencia de dos términos consecutivos de la sucesión

Si $a_k = \dfrac{1}{2k-1}$ entonces $a_{k+1} = \dfrac{1}{2(k+1)-1} = \dfrac{1}{2k+1}$

$$\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2-1} - \frac{1}{2\cdot 100+1} = 1 - \frac{1}{201} = \frac{200}{201}$$

2.3 Ejercicios Propuestos

I) Resuelve las siguientes sumatorias usando solamente las propiedades entregadas

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{25} 3 =$
2. $\displaystyle\sum_{n=5}^{32} (4n-1) =$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (2k+1) =$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k^2 =$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (-1)^k\, 2k =$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \left(2 + \frac{1}{k}\right) =$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (5^k - 1) =$
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \frac{k}{k+1} =$
9. $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} (-1)^i =$
10. $\displaystyle\sum_{n=2}^{5} \frac{n}{2n+2} =$
11. $\displaystyle\sum_{k=3}^{8} n =$
12. $\displaystyle\sum_{s=2}^{6} \frac{2}{s} =$
13. $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} 10^{-k} =$
14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{3} \frac{2^k}{k^2} =$
15. $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} 3^{-k} =$
16. $\displaystyle\sum_{k=1}^{40} k^2 =$
17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{24} (3n-2)$
18. $\displaystyle\sum_{k=5}^{354} 5 =$

Respuestas:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
75	2.044	24	55	4	9	776	$\frac{163}{60}$	0
10	11	12	13	14	15	16	17	18

$\frac{61}{140}$	$6n$	$\frac{29}{10}$	1,111111	$3\cdot\frac{2^k}{k^2}$	$\frac{121}{81}$	22.140	852	1.135

II) Resuelve usando propiedad Telescópica

1. $\sum_{k=1}^{13}\left(\frac{5}{k+1}-\frac{5}{k}\right)=$

2. $\sum_{k=5}^{20}\left(\frac{1}{k-3}-\frac{1}{k-4}\right)=$

3. $\sum_{k=5}^{10}\left[(k+1)^3-k^3\right]=$

4. $\sum_{n=2}^{13}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n-2}\right)=$

5. $\sum_{j=14}^{40}\left(\frac{3}{2j+1}-\frac{3}{2j-1}\right)=$

6. $\sum_{j=1}^{8}\left(3^{j+1}-3^{j}\right)=$

Respuestas:

1	2	3	4	5	6
$-\frac{65}{14}$	$-\frac{16}{17}$	1.206	$-\frac{6}{13}$	$-\frac{2}{27}$	19.680