2º medio

Aprendo
sin parar

Orientaciones para el trabajo con el texto escolar

Clase 7

Matemática

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

UNIDAD DE CURRÍCULUM Y EVALUACIÓN
UCE

Clase
7

Inicio

En esta sesión continuarás aprendiendo a realizar cálculos que involucran raíces cuadradas irracionales, aplicando las propiedades vistas anteriormente para obtener expresiones reducidas, que faciliten su manipulación y cálculo. Aprenderás un procedimiento para no dividir por números irracionales, denominado **RACIONALIZACIÓN,** el cual te permite tener las raíces irracionales del denominador en el numerador.

¡Recuerda!

- Recuerda que, para dividir entre números decimales, podemos expresarlos previamente como fracción:

$$2{,}875 : 1{,}25 = \frac{2875}{1000} : \frac{125}{100}$$

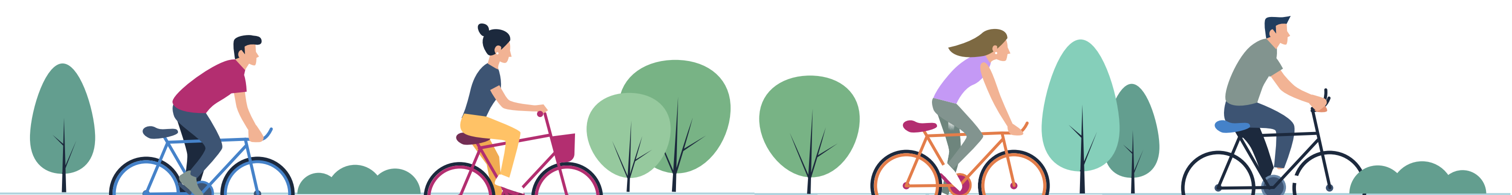
$$\frac{2875}{1000} \cdot \frac{100}{125}$$

- Observa que al calcular esta multiplicación simplificamos numeradores con denominadores. Así, tenemos que:

$$\frac{2875}{1000} \cdot \frac{100}{125} = \frac{2875}{10} \cdot \frac{1}{125}$$

$$= 287{,}5 : 125$$

- ¿Qué relación observas entre las divisiones 2,875 : 1,25 y 287, 5: 125? Escribe una explicación en tu cuaderno.
- ¿Qué dificultad crees que puede haber al dividir por un número irracional?



1. Anota en tu cuaderno el producto notable conocido como suma por diferencia:

$$(a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2$$

2. Analiza el punto 4 de la Actividad de proceso de la página 30 del texto, actividades a. y b. Calcula el valor de la fracción obtenida. ¿Es equivalente con la fracción original?

3. ¿Qué ventaja puede tener expresar la fracción de esta manera?

4. Realiza la actividad c. del mismo punto.

   a. ¿Es equivalente la fracción obtenida con la fracción original?

   b. ¿Qué resultado algebraico se utiliza en este caso?

5. Realiza la actividad d. del mismo punto.

   a. ¿Es equivalente la fracción obtenida con la fracción original?

   b. ¿Qué semejanza y qué diferencia encuentras con la operación realizada en la actividad c.? Explica.

6. Compara tus explicaciones anteriores con la dada en el tercer punto del resumen de la página 31 de tu texto. Subraya si hay partes que no comprendas para consultar con tu profesor cuando puedas.

Observa el siguiente ejemplo:

$$\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}}$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} + \frac{3\sqrt{15}}{\sqrt{15^2}}$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{3\sqrt{15}}{\sqrt{15^2}}$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{3}{3} + \frac{3\sqrt{15}}{15}$$

$$\frac{6\sqrt{5}}{15} + \frac{3\sqrt{15}}{15}$$

$$\frac{6\sqrt{5} + 3\sqrt{15}}{15}$$

$$\frac{3\sqrt{5}\,(2 + \sqrt{3})}{15}$$

Crea un ejemplo similar al que se ha trabajado en el ejemplo. Anota en tu cuaderno el ejemplo y los creados por ti. Señala en cada caso cada uno de los pasos a seguir y anota al inicio y al final un resultado con calculadora.

Cierre

Vamos concluyendo

- ¿Qué propiedades de las raíces has aprendido para reducirlas?
- ¿Qué utilidad piensas que puede tener obtener las expresiones reducidas?

Próxima clase:

- Te invitamos a seguir en la siguiente sesión con tu texto escolar, podrás seguir aprendiendo sobre las operaciones con raíces cuadradas y números irracionales.

2º medio

Texto escolar

Matemática

Unidad 1

A continuación, puedes utilizar las páginas del texto escolar correspondientes a la clase.

3. Aplica los pasos de los ejercicios anteriores para resolver las siguientes operaciones.

a. $12\sqrt{5} + 9\sqrt{3} - \sqrt[3]{64} - 15\sqrt{5} + 3\sqrt{3}$

b. $2\sqrt{27} - 4\sqrt{12} + 3\sqrt{48} - \sqrt{75}$

4. Responde a partir de cada racionalización. Completa cuando corresponda.

a. $\dfrac{3}{\sqrt{5}} \rightarrow \dfrac{3}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} =$

b. $\dfrac{6}{\sqrt{3}} \rightarrow \dfrac{6}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} =$

Para amplificar, ¿se consideró el numerador o el denominador en estos casos? Explica.

____

____

c. $\dfrac{5}{4 - \sqrt{3}} \rightarrow \dfrac{5}{4 - \sqrt{3}} \cdot \dfrac{4 + \sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}} = \dfrac{5 \cdot (4 + \sqrt{3})}{(4 - \sqrt{3})(4 + \sqrt{3})} = \dfrac{20 + 5\sqrt{3}}{16 - 3} = \dfrac{20 + 5\sqrt{3}}{13}$

¿Observas alguna relación entre el denominador y el valor que amplifica? ¿Qué producto notable se genera en este caso?

____

____

d. $\dfrac{4}{\sqrt{11} - 2\sqrt{3}} \rightarrow \dfrac{4}{\sqrt{11} - 2\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{11} + 2\sqrt{3}}{\sqrt{11} + 2\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{11} + 8\sqrt{3}}{-1} = -4\sqrt{11} - 8\sqrt{3}$

¿Se aplica el mismo procedimiento anterior si en el denominador existen dos radicales?, ¿de qué forma?

____

____

¿Cuál es el índice de cada radical en los ejercicios anteriores?, ¿de qué forma crees que esto influye en la racionalización?

____

____

En resumen

- Si al factorizar la cantidad subradical uno de sus factores se repite, ese factor se puede expresar fuera de la raíz:

$$\sqrt{a^2 \cdot b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = a \cdot \sqrt{b}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

- Dos o más raíces cuadradas que tengan la misma cantidad subradical se pueden sumar de la siguiente forma:

$$p\sqrt{a} + q\sqrt{a} = (p + q)\sqrt{a}, \text{ con } a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ p, q \in \mathbb{R}$$

  Es decir, se suman sus factores enteros aplicando la propiedad distributiva de los números reales.

- Dada una expresión fraccionaria que contiene una o más raíces cuadradas no exactas en su denominador, **racionalizar** la expresión es transformarla de modo que no posea raíces en el denominador, sin cambiar su valor. Para esto, se amplifica por una expresión tal que se elimine la o las raíces del denominador, por ejemplo:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c}}{\sqrt{b} - \sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{b} - a\sqrt{c}}{b - c} \qquad \frac{a}{\sqrt{b} - \sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{b} + a\sqrt{c}}{b - c}$$

con $a \in \mathbb{R}$, $b, c \in \mathbb{R}^+$ y $b \neq c$

- Una de las ventajas de racionalizar expresiones que contienen raíces cuadradas en el denominador es que se pueden aproximar y comparar de manera más sencilla.

Matemática y arte

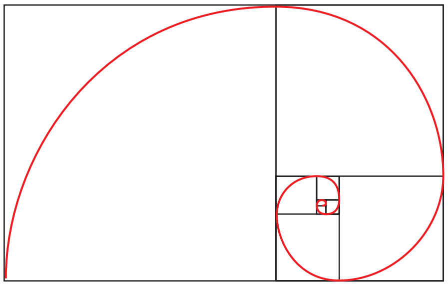
El número áureo es uno de los números que más fascinación ha levantado a lo largo de la historia. Se pueden distinguir tres componentes en su historia.

- **El número áureo**: es un número irracional que se expresa con la siguiente fórmula:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033988749...$$

- **Proporción áurea**: es un concepto geométrico, que se da cuando al partir un segmento en dos partes desiguales, dividiendo el total por la parte más larga se obtiene el mismo resultado que al dividir la más larga entre la más corta.
- **Sucesión de Fibonacci**: serie infinita de números naturales que empieza con un 1 y otro 1 y se construye añadiendo números que son la suma de los dos anteriores:

  1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377...



Uniendo el concepto aritmético con su representación geométrica se obtiene una de las imágenes más comúnmente asociadas al número y la razón áurea: **la espiral de Fibonacci**.