2º medio

Aprendo sin parar

Orientaciones para el trabajo con el texto escolar

Clase 5

Matemática

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

UNIDAD DE CURRÍCULUM Y EVALUACIÓN
UCE

Clase

5

Inicio

En esta sesión trabajarás la comparación y aproximación de números irracionales asociados a raíces cuadradas. Recuerda que no siempre los números irracionales están asociados a raíces cuadradas, por lo que será necesario en ocasiones utilizar la calculadora o aproximar manualmente los valores.

Observa el siguiente desarrollo

$(3\sqrt{5})^2 = 3\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5}$	| elevar al cuadrado
$3 \cdot \sqrt{5} \cdot 3 \cdot \sqrt{5}$	| separar en multiplicaciones
$3 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$	| conmutar
$3^2 \cdot \sqrt{5}^2$	| propiedad de potencias
$9 \cdot 5$	| elevar al cuadrado

Escribe con tus propias palabras lo que se hace en cada caso.

1. Generaliza la expresión anterior, $(a\sqrt{b})^2 =$ ______________

2. Analiza la resolución del problema 1 de la página 23 del texto. Expresa con tus palabras el criterio para ordenar raíces cuadradas y crea un ejemplo propio en que lo apliques, para 3 números del tipo $a\sqrt{b}$

3. Analiza la resolución del problema 2 de la página 24 del texto. Expresa con tus palabras el criterio para aproximar raíces cuadradas.

4. Escoge una raíz a tu elección y aproxímala con el método indicado. Verifica con calculadora y determina si obtuviste una aproximación por exceso o por defecto.

5. Resuelve el ejercicio 2 de la página 26. En cada caso aplica el método de elevar al cuadrado, y verifica encontrando una aproximación para cada raíz cuando corresponda. Verifica utilizando calculadora.

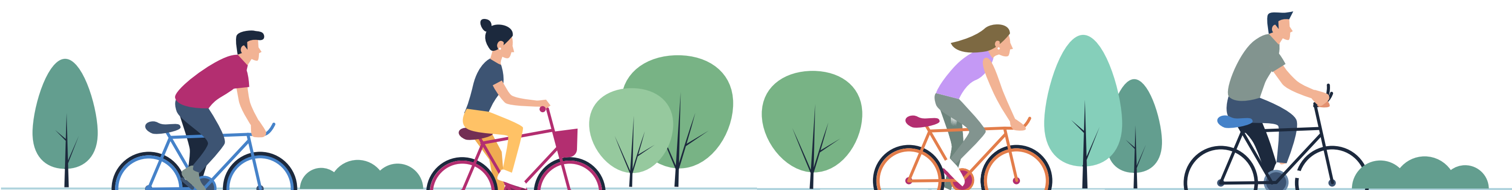
Cierre

Vamos concluyendo

- Lee comprensivamente el resumen de la página 25. Subraya las partes que no entiendas para preguntarle a tu profesor en cuanto puedas.

Próxima clase:

- Te invitamos a seguir en la siguiente sesión con tu texto del estudiante, podrás aplicar lo aprendido sobre raíces para operar con ellas.



2º medio

Texto escolar

Matemática

Unidad 1

A continuación, puedes utilizar las páginas del texto escolar correspondientes a la clase.

Actividades de proceso

1. Ordena de menor a mayor los siguientes números irracionales:

$$2\sqrt{5};\ 4\sqrt{2};\ 2\sqrt{3};4\sqrt{3}$$

Para ordenar números representados con raíces cuadradas, una técnica apropiada consiste en elevar al cuadrado cada número y ordenarlos según corresponda al orden de los valores obtenidos.

$(2\sqrt{3})^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{3})^2 = 4 \cdot 3 = 12$

$(4\sqrt{2})^2 = 4^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 16 \cdot 2 = 32$

$(2\sqrt{5})^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{5})^2 =$ $\boxed{}$

$(4\sqrt{3})^2 =$ $\boxed{}$

Ordena los números obtenidos de menor a mayor.

$$12 < \boxed{} < \boxed{} < \boxed{}$$

Y luego, los números irracionales en el mismo orden.

$$2\sqrt{3} < \boxed{} < \boxed{} < \boxed{}$$

Ayuda

Cuando a, b > 1, se cumple que:

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$$

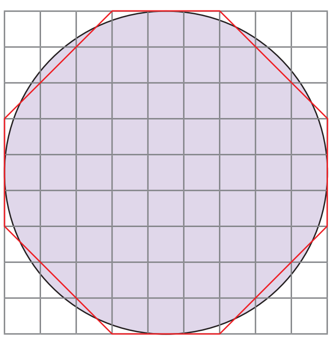
El símbolo "$\Leftrightarrow$" indica doble condicionalidad. En el caso anterior, se puede interpretar como: "cuando $a < b$, necesariamente se cumple que $a^2 < b^2$".

Matemática e historia

Aproximación del número π

Existen números irracionales que no corresponden a raíces cuadradas. Uno de los más importantes es π, número que relaciona la medida del diámetro de una circunferencia con su longitud, o también el área de un círculo con la de su cuadrado circunscrito.

El escriba Ahmes, en Egipto, estimó su valor, el cual está registrado en el papiro Rhind, que data del siglo XVI a. C.



Para ello, consideró un cuadrado de 9 unidades de lado, que fue dividido en 81 partes. Luego, para transformarlo en un polígono de 8 lados, cortó en cada vértice esquinas de lado 3 unidades, tal como se muestra en la imagen.

Se puede ver que el área del polígono corresponde a 18 cuadraditos menos que el cuadrado grande es decir, 81 – 18 = 63 cuadraditos, un área un poco menor que la del círculo. Por lo tanto, Ahmes estimó que el área del círculo sería de 64 cuadraditos.

El radio de este círculo es 4,5 unidades, por lo que, si se aplica la fórmula para el área, se obtiene que:

$$\pi \cdot 4{,}5^2 \approx 64 \rightarrow \pi \approx \frac{64}{20{,}25} \rightarrow \pi \approx 3{,}16$$

¿Es posible mejorar esta aproximación usando la misma estrategia? Explica.

Y él ¿quién es?

Leonhard Paul Euler
(1707-1783)

Este matemático y físico suizo fue uno de los más influyentes y prolíficos de la historia; se estima que sus obras completas tendrían una extensión de entre 60 y 80 volúmenes. Realizó importantes descubrimientos en áreas tan diversas como el cálculo o la teoría de grafos, e introdujo gran parte de la notación matemática, como los números e, i y π. Además, se le conoce por sus grandes aportes en la mecánica, la óptica y la astronomía.

Usa calculadora
Para explorar

Ayuda

En general, al aproximar, hay siempre una diferencia con el valor real llamada **error**.

Si al aproximar un número cualquiera el número obtenido es menor, se ha aproximado por **defecto**. En cambio, si es mayor, se ha aproximado por **exceso**.

Cuando de los dos valores posibles se ha considerado aquel con el que se comete el menor error, se ha aproximado por **redondeo**.

Por ejemplo, para aproximar $\sqrt{10}$ a la centésima:

- $\sqrt{10} \approx 3,16$, por defecto,
- $\sqrt{10} \approx 3,17$, por exceso,
- $\sqrt{10} \approx 3,16$, por redondeo.

2. La propiedad que conserva el orden al elevar al cuadrado también es útil para aproximar números expresados con raíces cuadradas, mediante acotaciones sucesivas.
Por ejemplo, para acotar $\sqrt{10}$:

a. Decide entre qué números naturales está $\sqrt{10}$ observando las raíces cuadradas exactas.

$$\sqrt{1} = 1 \qquad \sqrt{4} = 2 \qquad \sqrt{9} = 3 \qquad \sqrt{16} = 4$$

Como 10 se encuentra entre $\square$ y $\square$, $\sqrt{10}$ está entre $\square$ y $\square$.

b. Para mejorar la aproximación, busca un número entre los dos anteriores, calcula su cuadrado y compáralo con los demás valores:

Por ejemplo, al escoger 3,5, y calcular su cuadrado: $3,5^2 = 12,25$:

$$9 < 10 < 12,25 \qquad 3 < \sqrt{10} < 3,5$$

Repite el proceso, escogiendo algún número entre 3 y 3,5 $\square$. Luego, calcula su cuadrado $\square$ para comparar.

$$\square < 10 < \square \qquad \square < \sqrt{10} < \square$$

c. Nuevamente, escoge un número $\square$, calcula su cuadrado $\square$ y compara:

$$\square < 10 < \square \qquad \square < \sqrt{10} < \square$$

d. Si utilizas la calculadora $\sqrt{10} = 3,162277660168...$, ¿cuántos decimales correctos obtuviste con tu aproximación?, ¿dirías que es una buena aproximación? Justifica.

____

____

____

Actividades de práctica

1. Determina una aproximación de los siguientes números, aplicando el método de aproximación por acotación sucesiva.

   a. $\sqrt{6}$
   b. $\sqrt{13}$
   c. $\sqrt{27}$
   d. $\sqrt{62}$
   e. $\sqrt{90}$
   f. $\sqrt{185}$
   g. $\sqrt{240}$
   h. $\sqrt{350}$

2. Ordena ascendentemente los siguientes números reales.

   a. $\sqrt{26}$; $2\sqrt{3}$; $\frac{721}{200}$; $3,601$
   b. $3\sqrt{5}$; $2\sqrt{3}$; $\frac{4}{8}$; $0,\overline{56}$
   c. $\sqrt{6}$; $2\sqrt{2}$; $\frac{49}{20}$; $2,42$
   d. $3\sqrt{2}$; $\sqrt{17}$; $\frac{13}{2}$; $4,2$
   e. $\sqrt{10}$; $\sqrt{3}$; $\frac{1}{3}$; $2,5$
   f. $2\sqrt{8}$; $\sqrt{15}$; $\frac{22}{5}$; $4,0\overline{8}$

3. Representa en una recta numérica, mediante construcción geométrica, el número real pedido en cada caso.

   a. $\sqrt{2}$
   b. $\sqrt{5}$
   c. $\sqrt{10}$
   d. $\sqrt{37}$
   e. $\sqrt{50}$
   f. $\sqrt{17}$

4. Responde las preguntas en tu cuaderno.

   a. ¿Para qué crees que sirve aproximar? Explica con tus palabras.
   b. ¿Es igual redondear que truncar? Explica utilizando un ejemplo.
   c. Para determinar una mejor aproximación de un número, ¿se debe redondear o truncar? Justifica.
   d. ¿Crees que los métodos vistos anteriormente sirven para aproximar raíces cúbicas?, ¿por qué?